Skew brace における n-isoclinism について

お茶の水女子大学　大学院人間文化創成科学研究科　理学専攻　数学コース
新井利沙 (Risa ARAI) *†

概要

Skew brace とは, 二つの群演算 $\cdot, \circ$ が定義された集合であって, 任意の元に対して, brace relation を満たすものである. この skew brace 上に, 群上に定義されている n-isoclinism という概念を verbal subgroup と marginal subgroup の類似の概念を用いて定義する.

1　目的

Brace とは理論物理学の Yang-Baxter 方程式の involutive な非退化集合論的解を与えるために, Rump ([8]) により定義された. Skew brace とは, involutive でない非退化集合論的解も網羅するために, Guarnieri, Vendramin ([3]) により, brace を一般化したものである.

定義 1.1. 次の brace relation を満たす, 2 つの群演算 $\cdot$, $\circ$ が定義された, 集合 $B = (B, \cdot, \circ)$ を **skew brace** という.

$$\forall a, b, c \in B, \quad a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c).$$

ただし, a^{-1} は, $a \in B$ の群 $(B, \cdot)$ における逆元を表す. また群 $(B, \cdot)$ がアーベル群のとき, skew brace を **brace** といい, Rump の left brace と同値であることが知られている.

群において, $n \in \mathbb{N}$ に対して, n-isoclinism が定義されている ([4], [5]). Skew brace においては, $n = 1$ のとき, Letourmy, Vendramin ([7]) により定義されている. $n \geq 2$ のとき, Kanrar, Roelants, Yadav ([6]) により, 定義されている. 群における n-isoclinism の定義は昇中心列の項が使われていて, skew brace における n-isoclinism を考察するとき, 昇中心列の類似である annihilator series の項を使うことが自然である. 実際, Letourmy, Vendramin による定義も中心の代わりに annihilator が使われ, Kanrar, Roelants, Yadav による定義も annihilator series の項が使われている. しかし, annihilator series の項を使うと, n-isoclinism の定義は一部の skew brace でしか定まらない. ここで, 降中心列の項は語 $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$ の verbal subgroup, 昇中心列の項は marginal subgroup としてみなすこともできることに着目した.

本研究の目的は, skew brace において, n-isoclinism の定義を, verbral subgroup の類似である, verbal sub-skew brace と, marginal subgroup の類似である, marginal left ideal を定義し, それらを

* E-mail:g2440601@edu.cc.ocha.ac.jp
† 本研究は, ツァンシンイー准教授との共同研究である ([1]).

用いて定義することである．またこれらを取り入れることにより, 2 つの skew brace が W^n-isoclinic ならば, W^{n+1}-isoclinic でもあるという結果も得られたので紹介する (定理 3.19).

2 群における n-isoclinism

本章では, $G = (G, \cdot)$ を群, $Z(G)$ を G の中心とする．以下, G の演算 $\cdot$ を省略し, $g \cdot h = gh$ と書くことにする．

2.1 降中心列と昇中心列

まず, 群論の基本事項を確認する．群の交換子とは

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \tag{1}$$

のことである．交換子は, x と y の可換性を測るものである．G がアーベル群であることと, 任意の $x, y \in G$ に対して, $[x, y] = 1$ になることは同値であることは明らかである．交換子の性質として, 次が成り立つ．

命題 2.1. 任意の $g, h, k \in G$ に対して,

(1) $[g, hk] = [g, h]h[g, k]h^{-1}$
(2) $[hk, g] = h[k, g]h^{-1}[h, g]$
(3) $k[g, h]k^{-1} = [kgk^{-1}, khk^{-1}]$
(4) $[g, h^{-1}] = [h, h^{-1}gh]$

が成り立つ．

次に, 中心列を考える．

定義 2.2. G の**中心列**とは, G の正規列

$$\{1\} = G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

があって, 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ が成り立つような列である．

ここで, G の任意の部分集合 X, Y に対して,

$$[X, Y] \coloneqq \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle \tag{2}$$

とする．中心列を作る方法として, まずは, 降中心列を定義する．

定義 2.3. $\gamma_1(G) = G$ とする．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\gamma_{i+1}(G) = [G, \gamma_i(G)]$$

とする．このとき,

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \gamma_3(G) \trianglerighteq \cdots \tag{3}$$

を G の**降中心列**という．$n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\gamma_n(G) = \{1\}$ のとき, (3) は中心列である．

次に昇中心列を定義する．

定義 2.4. $\zeta_0(G) = \{1\}$ とする．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して, $\zeta_i(G)$ を

$$\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = Z(G/\zeta_{i-1}(G))$$

が成り立つような $\zeta_{i-1}(G)$ を含む部分群とする．このとき

$$\{1\} = \zeta_0(G) \trianglelefteq \zeta_1(G) \trianglelefteq \zeta_2(G) \trianglelefteq \cdots \tag{4}$$

を G の**昇中心列**という．第四同型定理より, 任意の i に対して, $\zeta_i(G)$ はただ一つ存在し, $\zeta_i(G)$ は G の正規部分群である．よって, $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\zeta_n(G) = G$ となるとき, (4) は中心列である．

2.2 群における n-isoclinism の定義

この節では, 群における n-isoclinism の定義を確認する．以下, $n \geq 1$ とし,

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, [x_2, \cdots, x_n]]$$

を表すとする．

命題 2.5. 写像

$$\phi^G : (G/\zeta_n(G))^{\oplus n+1} \longrightarrow \gamma_{n+1}(G); (\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}, \cdots, \widetilde{g_{n+1}}) \mapsto [g_1, g_2, \cdots, g_{n+1}]$$

は well-defined である．ただし, 各 $g \in G$ に対して, $\widetilde{g} = g\zeta_n(G)$ とする．

これらを用いて, 群の n-isoclinism は次のように定義できる ([4], [5])．

定義 2.6. G, H を群とする．このとき同型写像

$$\xi : G/\zeta_n(G) \longrightarrow H/\zeta_n(H),\ \theta : \gamma_{n+1}(G) \longrightarrow \gamma_{n+1}(H)$$

が存在して, 次の図式が可換になるとき, (ξ, θ) を n-**isoclinism** という．

$$\begin{tikzcd}
(G/\zeta_n(G))^{\oplus n+1} \arrow[r, "\phi^G"] \arrow[d, "\xi^{\oplus n+1}"'] & \gamma_{n+1}(G) \arrow[d, "\theta"] \\
(H/\zeta_n(H))^{\oplus n+1} \arrow[r, "\phi^H"'] & \gamma_{n+1}(H)
\end{tikzcd}$$

また上の図式が可換になるような同型写像の組 (ξ, θ) が存在するとき, G と H は n-**isoclinic** であるといい, $G \sim_n H$ と表す．ただし, 写像 ϕ^- は命題 2.5 の写像である．

命題 2.7. 群 G, H に対して,

$$G \sim_n H \Longrightarrow G \sim_{n+1} H$$

が成り立つ．

2.3　Verbal subgroup と marginal subgroup

$n \geq 1$ とする．まず, 語の定義を確認する．集合 X の有限個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$x_1^{\pm 1} \diamond x_2^{\pm 1} \diamond \cdots \diamond x_n^{\pm 1}$$

を n 変数の**語**という．群の場合, $\diamond$ は群演算を表す.

Verbal subgroup と marginal subgroup を次のように定義する．

定義 2.8. W を n 変数の語の集合とする．このとき,

$$V_W(G) = \langle w(g_1, g_2, \cdots, g_n) \mid w \in W, g_1, g_2, \cdots g_n \in G \rangle$$

を **verbal subgroup** という．また,

$$M_W(G) = \left\{ z \in G \;\middle|\; \begin{aligned} &\forall w \in W, g_1, g_2 . \cdots, g_n \in G, 1 \leq i \leq n, \\ &\qquad w(g_1, g_2, \cdots, g_i, \cdots, g_n) = w(g_1, g_2, \cdots, g_i z, \cdots, g_n) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = w(g_1, g_2, \cdots, z g_i, \cdots, g_n) \end{aligned} \right\}$$

を **marginal subgroup** という．Marginal subgroup が部分群になることは容易に示せる．

n-isoclinism の定義 (定義 2.6) にある, $\gamma_{n+1}(G)$ と $\zeta_n(G)$ を, verbal subgroup と marginal subgroup を用いて記述することを考える．

命題 2.9. 語 $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$ の verbal subgroup, marginal subgroup について,

$$V_{\{[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]\}}(G) = \gamma_{n+1}(G)$$
$$M_{\{[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]\}}(G) = \zeta_n(G)$$

が成り立つ.

3　Skew brace における n-isoclinism

前章で述べた, n-isoclinism の定義を, skew brace に一般化することが目的である．本章において, $B = (B, \cdot, \circ)$ を skew brace とする．以下, B の加法群の演算 $\cdot$ を省略し, $a \cdot b = ab$ と書くことにする．また, 加法群と乗法群のそれぞれの演算の交換子について,

$$[x, y]_\bullet = xyx^{-1}y^{-1}$$
$$[x, y]_\circ = x \circ y \circ \overline{x} \circ \overline{y}$$

を表す．ただし, $\bar{x}$ は $x \in B$ の群 $(B, \circ)$ における逆元を表す．B の部分集合 X に対して, $\langle X \rangle_\bullet$ を演算 $\cdot$ に関する X の生成する部分群, $\langle X \rangle$ を X の生成する部分 skew brace を表すとする．ただし, 部分 skew brace の定義は, 定義 3.2 を参照.

3.1 Skew brace の基本事項

本節では, skew brace の基本事項を説明する. Skew brace において, 加法群の単位元と乗法群の単位元は一致することが知られている. このことは, brace relation から簡単に確かめることができる. 以下, この単位元を 1 と書くことにする. ここで, skew brace において重要な写像がある. 各 $a \in B$ に対して, 写像

$$\lambda_a : B \longrightarrow B; b \mapsto a^{-1}(a \circ b)$$

を考える. このとき, 任意の $a, b \in B$ に対して,

$$\begin{gathered} a \circ b = a\lambda_a(b), \quad ab = a \circ \lambda_{\overline{a}}(b) \\ \overline{a} = \lambda_{\overline{a}}(a^{-1}), \quad a^{-1} = \lambda_a(\overline{a}) \end{gathered}$$

と書けることは, λ_a の定義と次の命題 3.1 から簡単にわかる.

命題 3.1. 次が成り立つ.

(1) 任意の $a \in B$ に対して, 写像 $\lambda_a : (B, \cdot) \longrightarrow (B, \cdot)$ は同型である.
(2) 写像 $\lambda : (B, \circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(B, \cdot); a \mapsto \lambda_a$ は準同型である.

定義 3.2. B の部分集合 Z が

(1) $(Z, \cdot)$ は $(B, \cdot)$ の部分群である.
(2) $(Z, \circ)$ は $(B, \circ)$ の部分群である.

をともに満たすとき, $Z = (Z, \cdot, \circ)$ を B の**部分 skew brace** という. このとき, Z は brace relation を満たすことは明らかであるから, $Z = (Z, \cdot, \circ)$ は skew brace となる.

Skew brace には, left ideal と ideal という概念がある.

定義 3.3. B の部分集合 I が

(1) $(I, \cdot)$ は $(B, \cdot)$ の部分群である.
(2) 任意の $a \in B$ に対して, $\lambda_a(I) \subseteq I$.

をともに満たすとき, I を B の **left ideal** という.

命題 3.4. I が B の left ideal であるとき, 次が成り立つ.

(1) $(I, \circ)$ は $(B, \circ)$ の部分群である.
(2) 任意の $a \in B$ に対して, $a \cdot I = a \circ I$.

定義 3.5. B の left ideal I が

(1) $(I, \cdot)$ は $(B, \cdot)$ の正規部分群である.
(2) $(I, \circ)$ は $(B, \circ)$ の正規部分群である.

をともに満たすとき, I を B の **ideal** という. このとき, $B/I = \{aI \mid a \in B\} = \{a \circ I \mid a \in B\}$ の加法と乗法をそれぞれ,

$$(aI) \cdot (bI) = (a \cdot b)I$$
$$(aI) \circ (bI) = (a \circ b)I$$

とすると, $B/I = (B/I, \cdot, \circ)$ は skew brace である.

3.2 Left series, right series, annihilator series

ここで, skew brace のスター積とは,

$$x * y \coloneqq x^{-1}(x \circ y)y^{-1} = \lambda_x(y)y^{-1}$$

のことである. スター積は, x と y の $\cdot$ 積と $\circ$ 積の差を測るものである. また, これは群における交換子 (1) の類似である. 命題 2.1 と同様の性質が, $*$ でも成り立つ.

命題 3.6. 任意の $a, b, c \in B$ に対して,

(1) $a * (bc) = (a * b)b(a * c)b^{-1}$
(2) $(a \circ b) * c = (a * (b * c))(b * c)(a * c)$
(3) $\lambda_a(b * c) = (a \circ b \circ \bar{a}) * \lambda_a(c)$
(4) $a * b^{-1} = b^{-1}(a * b)^{-1}b$

が成り立つ.

さらに, (2) と同様に, B の部分集合 X, Y に対して,

$$X * Y \coloneqq \langle x * y \mid x \in X, y \in Y \rangle_{\bullet}$$

とする. 降中心列 (定義 2.3) の類似として, 次の left series, right series がある.

定義 3.7. $B^1 = B^{(1)} = B$ とする. 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して,

$$B^{i+1} = B * B^i, \qquad B^{(i+1)} = B^{(i)} * B$$

とする. このとき,

$$B = B^1 \supseteq B^2 \supseteq B^3 \supseteq \cdots \tag{5}$$
$$B = B^{(1)} \supseteq B^{(2)} \supseteq B^{(3)} \supseteq \cdots \tag{6}$$

である. (5) を B の **left series**, (6) を B の **right series** という.

(5), (6) の包含は明らかである. また [2] より, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, B^i は, left ideal であり, $B^{(i)}$ は, ideal であることが知られている. 一般に, B^i と $B^{(i)}$ は異なる. Skew brace には, annihilator という概念がある. これは, 群における中心の類似の概念である. B の **annihilator** とは,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}(B) &= \ker(\lambda) \cap Z(B, \cdot) \cap Z(B, \circ) \\ &= \{z \in B \mid \forall a \in B : z * a = [z, a]_{\bullet} = [z, a]_{\circ} = 1\} \\ &= \{z \in B \mid \forall a \in B : z * a = a * z = [z, a]_{\bullet} = 1\}\end{aligned}$$

のことである．ただし, λ は, 命題 3.1(2) の写像である．

命題 3.8. $\mathrm{Ann}(B)$ は B の ideal である．

ここで, annihilator series を定義する．これは群における昇中心列 (定義 2.4) の類似である．

定義 3.9. $\mathrm{Ann}_0(B)=\{1\}$ とする．各 $i\in\mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{Ann}_i(B)$ を

$$\mathrm{Ann}_i(B)/\mathrm{Ann}_{i-1}(B)=\mathrm{Ann}(B/\mathrm{Ann}_{i-1}(B))$$

が成り立つような $\mathrm{Ann}_{i-1}(B)$ を含む部分 skew brace とする．このとき

$$\{1\}=\mathrm{Ann}_0(B)\trianglelefteq\mathrm{Ann}_1(B)\trianglelefteq\mathrm{Ann}_2(B)\trianglelefteq\cdots$$

を B の **annihilator series** という．第四同型定理より, 任意の $i\in\mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{Ann}_i(B)$ はただ一つ存在し, $\mathrm{Ann}_i(B)$ は B の ideal である．

3.3 Skew brace における 1-isoclinism

Skew brace における 1-isoclinism は Letourmy, Vendramin ([7]) により定義された．この節では, $B'=\langle\gamma_2(B,\cdot),B^2\rangle_\bullet$ とする．Skew brace における 1-isoclinism の定義を確認するために, 命題 2.5 の類似である次の命題で, 準備をする．

命題 3.10 ([7, Lemma 2.6, Proposition 3.9])**.** 写像

$$\begin{aligned}\phi_\bullet^B &: B/\mathrm{Ann}(B)\times B/\mathrm{Ann}(B)\longrightarrow B';(\widetilde{a},\widetilde{b})\mapsto[a,b]_\bullet\\ \phi_\circ^B &: B/\mathrm{Ann}(B)\times B/\mathrm{Ann}(B)\longrightarrow B';(\widetilde{a},\widetilde{b})\mapsto[a,b]_\circ\\ \phi_*^B &: B/\mathrm{Ann}(B)\times B/\mathrm{Ann}(B)\longrightarrow B';(\widetilde{a},\widetilde{b})\mapsto a*b\end{aligned}$$

は well-defined である．ただし, 各 $a\in B$ に対して, $\widetilde{a}=a\mathrm{Ann}(B)$ とする．

定義 3.11. A,B を skew brace とする．このとき同型写像

$$\xi:A/\mathrm{Ann}(A)\longrightarrow B/\mathrm{Ann}(B),\theta:A'\longrightarrow B'$$

が存在して, 次の図式が可換になるとき, (ξ,θ) を **isoclinism** という．

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "\theta"'] & (A/\mathrm{Ann}(A))^{\oplus2} \arrow[l, "\phi_*^A"'] \arrow[r, "\phi_\bullet^A"] \arrow[d, "\xi^{\oplus2}"'] & A' \arrow[d, "\theta"] \\ B' & (B/\mathrm{Ann}(B))^{\oplus2} \arrow[l, "\phi_*^B"] \arrow[r, "\phi_\bullet^B"'] & B' \end{tikzcd}$$

また上の図式が可換になるような同型写像の組 (ξ,θ) が存在するとき, A と B は **isoclinic** であるといい, $A\sim B$ で表す．ただし, 写像 $\phi_\bullet$, ϕ_* は命題 3.10 の写像である．

この定義において, $\bar{\phi_\circ}$ を考慮しなかったのは, $\bar{\phi_\bullet}$ と $\bar{\phi_*}$ を用いて, $\circ$ について, 図式が可換となるからである.

命題 3.12 ([7, Proposition 3.9])**.** A, B を skew brace とする. A と B が (ξ, θ) により isoclinic ならば, 図式

$$\begin{tikzcd}
(A/\mathrm{Ann}(A))^{\oplus 2} \arrow[r, "\phi_\circ^A"] \arrow[d, "\xi^{\oplus 2}"'] & A' \arrow[d, "\theta"] \\
(B/\mathrm{Ann}(B))^{\oplus 2} \arrow[r, "\phi_\circ^B"'] & B'
\end{tikzcd}$$

は可換である. ただし, $\bar{\phi_\circ}$ は命題 3.10 の写像である.

3.4 主結果

ここでは, verbal subgroup と marginal subgroup の代わりに verbal sub-skew brace と marginal left ideal を定義し, それらを用いて skew brace 上で n-isoclinism を定義したい. 以下, $n \geq 1$ とし,

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = x_1 * (x_2 * \cdots * x_n)$$
$$x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n = (x_1 \star \cdots \star x_{n-1}) * x_n$$

を表すとする. ここで, 集合 X の有限個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$x_1^{\epsilon_1} \diamond_1 x_2^{\epsilon_2} \diamond_2 \cdots \diamond_{n-1} x_n^{\epsilon_n}$$

を n 変数の**語**という. ただし, skew brace の場合, $\diamond_i$ は, $\cdot$ または $\circ$ を表し, $x_i^{\epsilon_i}$ は, $x_i, x_i^{-1}, \overline{x_i}$ のいずれかを表す.

定義 3.13. W を skew brace の n 変数の語の集合とする. このとき,

$$V_W(B) = \langle w(b_1, b_2, \cdots, b_n) \mid w \in W, b_1, b_2, \cdots, b_n \in B \rangle$$

を **verbal sub-skew brace** という. また,

$$M_W(B) = \left\{ z \in B \;\middle|\; \begin{aligned} &\forall w \in W, a, b_1, b_2 . \cdots, b_n \in B, 1 \leq i \leq n, \\ &w(b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots, b_n) = w(b_1, b_2, \cdots, b_i \lambda_a(z), \cdots, b_n) \\ &\qquad = w(b_1, b_2, \cdots, \lambda_a(z) b_i, \cdots, b_n) \\ &\qquad = w(b_1, b_2, \cdots, b_i \circ \lambda_a(z), \cdots, b_n) \\ &\qquad = w(b_1, b_2, \cdots, \lambda_a(z) \circ b_i, \cdots, b_n) \end{aligned} \right\}$$

を **marginal left ideal** という. Marginal left ideal が left ideal になることは, 容易に示せる.

Skew brace において, 語 $x_1 * x_2 * \cdots * x_{n+1}$, $x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_{n+1}$ について命題 2.9 と同様のことが成り立つだろうか? Verbal sub-skew brace について, 同様の結果を示すことができなかった. ここで, 定義 3.7 で紹介した, left series と right series の代わりに,

$$B^{\underline{n}} := V_{\{x_1 * x_2 * \cdots * x_n\}}(B)$$
$$B^{(\underline{n})} := V_{\{x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n\}}(B)$$

と定義する．このとき明らかに $n=1,2$ に対して，$B^n = B^{\underline{n}} = B^{(\underline{n})} = B^{(n)}$ が成り立つ．Marginal left ideal について，次が成り立つ．

命題 3.14. 語 $[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]_\bullet, [x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]_\circ, x_1 * x_2 * \cdots * x_{n+1}$ の marginal left ideal について，

$$\mathrm{Ann}_n(B) \subseteq M_{\{[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}]_\bullet,[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}]_\circ,x_1*x_2*\cdots*x_{n+1}\}}(B)$$

が成り立つ．$n=1$ のとき，等号が成立する．

命題 3.14 について，一般に $\star$ について，包含関係は成立しない．よって，skew brace における n-isoclinism を定義するにあたり，$\mathrm{Ann}_n(B)$ ではなく，marginal left ideal を使うことを考えた．ただし，marginal left ideal は ideal とは限らない．その場合は，商 skew brace が定まらないため，core という新しい概念を導入する．

補題 3.15. B の ideal について，次が成り立つ．

(1) $\{I_u\}_{u\in U}$ を包含に関して，全順序付けされた B の ideal の族とする．このとき，$\bigcup_{u\in U} I_u$ は B の ideal である．
(2) I, J が B の ideal であるとき，IJ も B の ideal である．

命題 3.16. Z を B の部分 skew brace とし，

$$\mathcal{S}(Z) = \{I \mid I \text{ は } Z \text{ に含まれる } B \text{ の ideal}\}$$

とする．このとき，$\mathcal{S}(Z)$ は包含に関して，極大元がただ 1 つ存在する．

Proof. 補題 3.15 と Zorn の補題を使うことにより示せる．□

定義 3.17. B の任意の部分 skew brace Z に対して，Z の **core** $\mathrm{Core}_B(Z)$ を $\mathcal{S}(Z)$ の極大元と定義する．命題 3.16 から，一意存在性が明らかである．

これらを用いて，skew brace における W-isoclinism を次のように定義する．

定義 3.18. $W = W_n$ を skew brace の $n+1$ 変数の語の集合とする．このとき，同型写像

$$\xi : A/\mathrm{Core}_A(M_W(A)) \longrightarrow B/\mathrm{Core}_B(M_W(B)),\ \theta : V_W(A) \longrightarrow V_W(B)$$

が存在して，次の図が可換になるとき，(ξ, θ) を W**-isoclinism** という．

$$\begin{tikzcd}
(A/\mathrm{Core}_A(M_W(A)))^{\oplus n+1} \arrow[rr, "\phi_w^A"] \arrow[d, "\xi^{\oplus n+1}"'] & & V_W(A) \arrow[d, "\theta"] \\
(B/\mathrm{Core}_B(M_W(B)))^{\oplus n+1} \arrow[rr, "\phi_w^B"'] & & V_W(B)
\end{tikzcd}$$

ただし，$w \in W$ に対して，$\bar{\phi_w}$ は，

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \mapsto w(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$$

が誘導する写像である.

このとき, 命題 2.7 の類似として, 次の性質が成り立つ.

定理 3.19. W_R, W_L を 2 つの, skew brace の 2 変数の語の集合とする. $W = W_R \cup W_L$ とおく. $w = w_1 \in W$ に対して,

$$w_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \begin{cases} w(x_1, w_{n-1}(x_2, \cdots, x_{n+1})) & (w \in W_R) \\ w(w_{n-1}(x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}) & (w \in W_L) \end{cases}$$

とおく. また, $n \geq 1$ に対して, $W^n = \{w_n \mid w \in W\}$ とおき, これは skew brace の $n+1$ 変数の語の集合である. このとき, 2 つの skew brace が W^n-isoclinic ならば, W^{n+1}-isoclinic でもある.

4 謝辞

本研究は JSPS 科研費 24K16891 の助成を受けたものです.
本稿執筆にあたり, ツァンシンイー准教授には, 終始丁寧なご指導賜りました. 心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] Arai, R.; Tsang, C. On n-isoclinism of skew braces, arXiv:2504.09551.

[2] Cedó, F.; Smoktunowicz, A.; Vendramin, Leandro. Skew left braces of nilpotent type, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 118 (2019), no. 6, 1367-1392.

[3] Guarnieri, L.; Vendramin, L. Skew braces and the Yang-Baxter equation, Math. Comp. 86 (2017), no. 307, 2519-2534.

[4] Hall, P. The classification of prime-power group, J. Reine Angew. Math. 182 (1940), 130-141.

[5] Hall, P. Verbal and marginal subgroups, J. Reine Angew. Math. 182 (1940), 156-157.

[6] Kanrar, A.; Roelants, C.; Yadav, M. K. Central series' and (n)-isoclinism of skew left braces, arXiv:2503.10313.

[7] Letourmy, T.; Vendramin, L. Isoclinism of skew braces, Bull. Lond. Math. Soc.55 (2023), no. 6, 2891-2906.

[8] Rump, W. Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation, J. Algebra 307 (2007), no. 1, 153-170.